PRIZME

Najpre da kažemo nešto o obeležavanjima i o tekstu zadataka:

- sa **a** obeležavamo dužinu osnovne ivice

- sa **H** obeležavamo dužinu visine prizme

- sa **B** obeležavamo površinu osnove (baze)

- sa **M** obeležavamo površinu omotača

- omotač se sastoji od **bočnih strana** , naravno trostrana prizma u omotaču ima 3 takve strane, četvorostrana 4 itd.

- sa **D** obeležavamo dužinu dijagonale prizme

- ako u tekstu zadatka kaže **jednakoivična** prizma, to nam govori da su osnovna ivica i visina jednake , to jest :

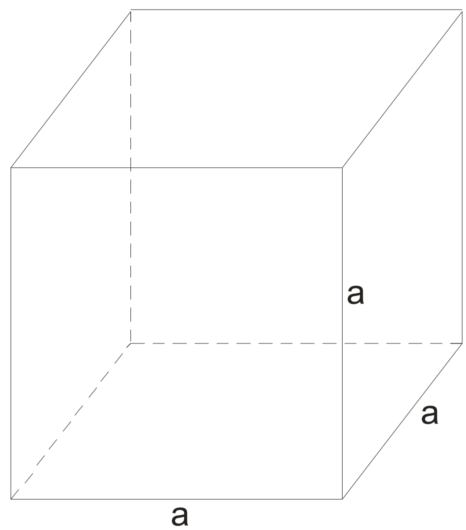
  a = H

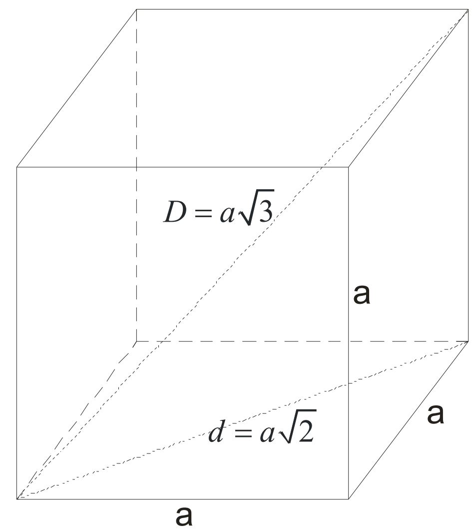
- ako u tekstu zadatka ima reč **prava** – to znači da je visina prizme normalna na ravan osnove ili ti , jednostavnije rečeno , prizma nije kriva

- ako u tekstu zadatka ima reč **pravilna** , to nam govori da je u osnovi (bazi) pravilan mnogougao: jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.

Dve najpoznatije prizme su kocka i kvadar, pa vam predlažemo da najpre njih proučite:

KOCKA



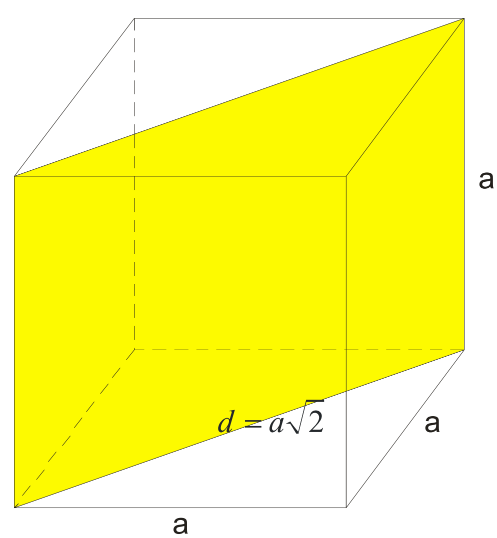


$$P = 6a^2 \qquad \mathrm{V} = a^3$$

Kocka ima 12 ivica dužine a.

Mala dijagonala (dijagonala osnove) je $d = a\sqrt{2}$.

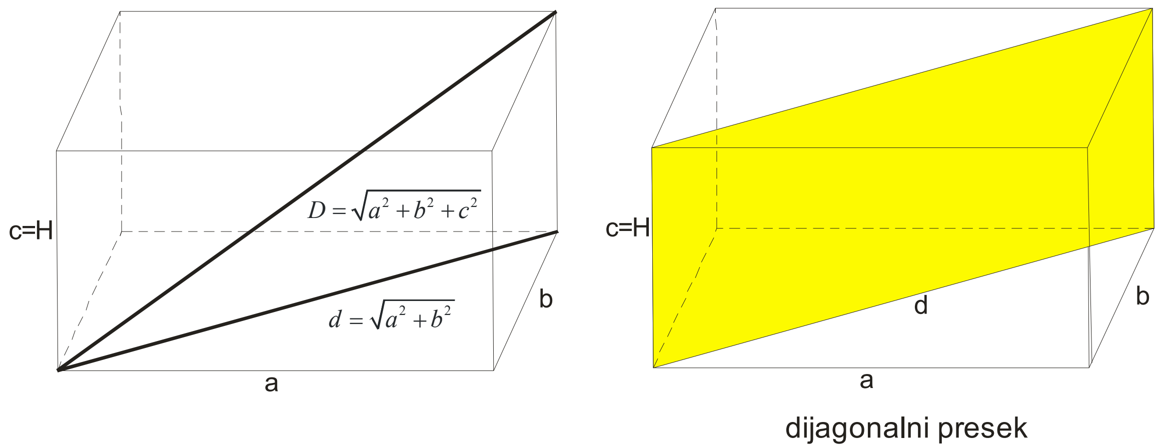
Velika (telesna) dijagonala je $D = a\sqrt{3}$



dijagonalni presek

Površina dijagonalnog preseka se računa po formuli: $P_{DP} = a^2\sqrt{2}$

KVADAR



$$P = 2(ab + ac + bc)$$
$$V = abc$$

Mala dijagonala (dijagonala osnove) se računa $d^2 = a^2 + b^2$ to jest $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Velika dijagonala se računa $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ to jest $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dijagonalni presek je pravougaonik površine $P_{DP} = d \cdot c$

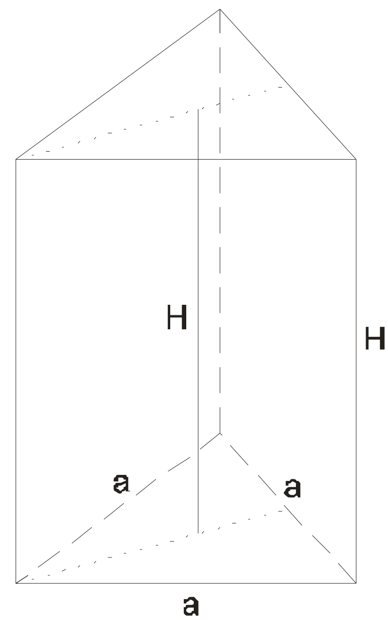
Površina svake prizme se izražava formulom:

$$P = 2B + M$$

Zapremina svake prizme se izračunava formulom:

$$V = B \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA



$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ je površina osnove(baze)

$M = 3aH$ je površina omotača

$$P = 2B + M$$

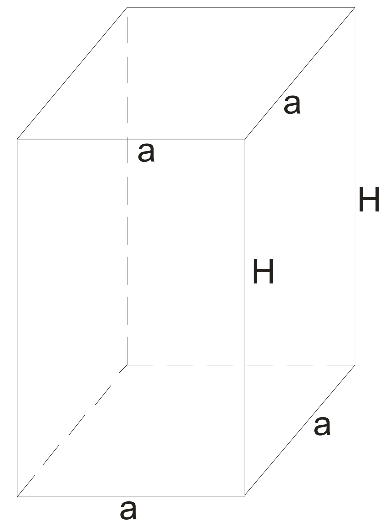
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

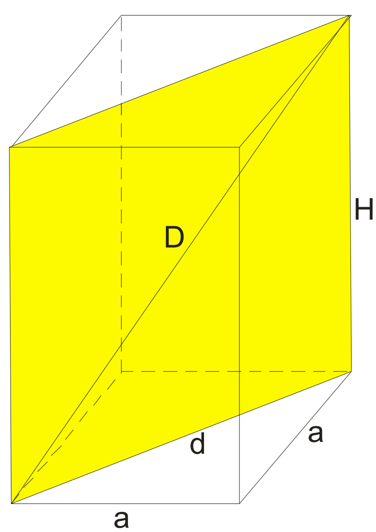
PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PRIZMA



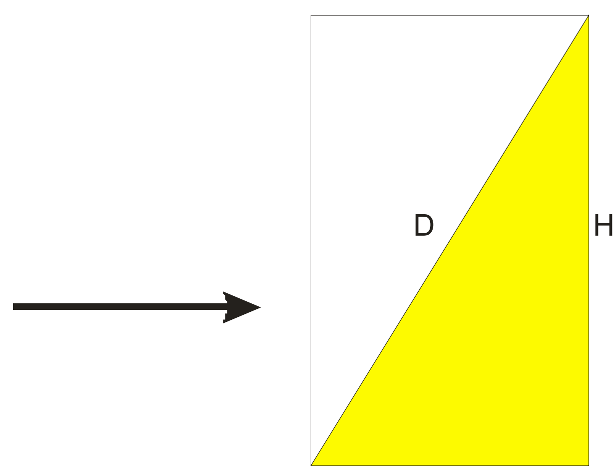
$B = a^2$ $\quad\quad$ $M = 4aH$

$$P = 2B + M \qquad\qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2a^2 + 4aH \qquad\qquad V = a^2 \cdot H$$



dijagonalni presek



$d = a\sqrt{2}$

dijagonalni presek

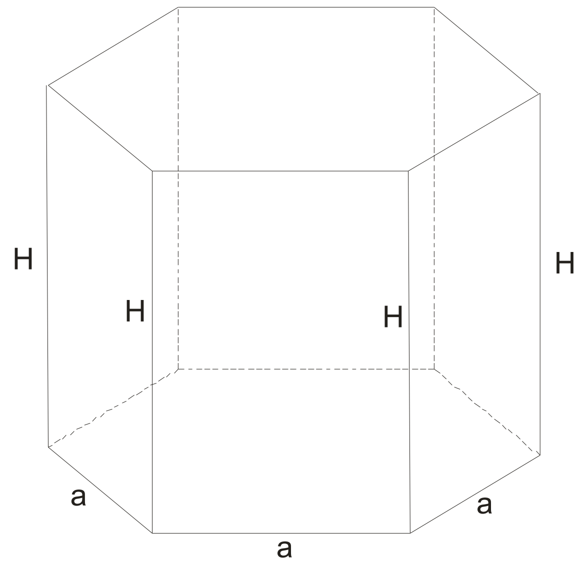
$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + H^2$

Površina dijagonalnog preseka se izračunava:

$$P = d \cdot H$$

$$P = aH\sqrt{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PRIZMA

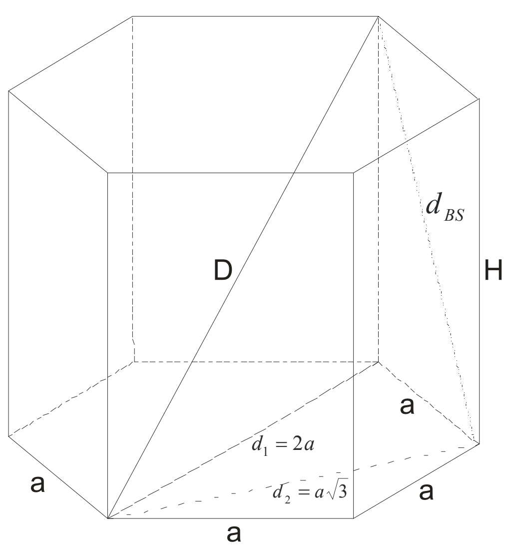


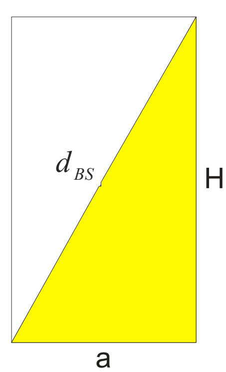
$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6aH$$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH \qquad V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

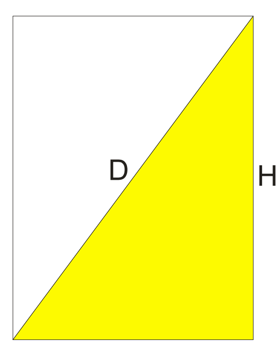
$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH \qquad V = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$$





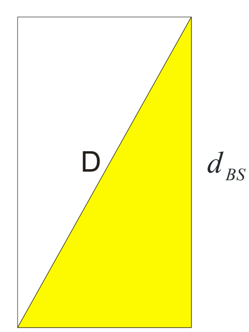
Bočna strana

$d_{BS}{}^2 = H^2 + a^2$



$d_1 = 2a$

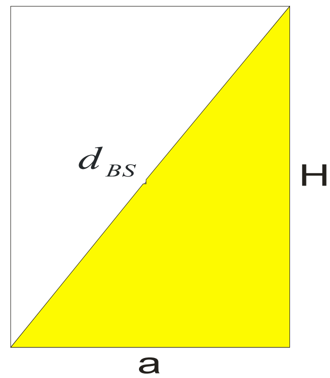
Veći dijagonalni presek



$d_2 = a\sqrt{3}$

Manji dijagonalni presek

Još samo da vam napomenemo da primena Pitagorine teoreme na bočnu stranu :



Bočna strana

$$d_{BS}^{\ 2} = H^2 + a^2$$

važi kod svake od navedenih pravilnih prizmi!

ZADACI

1*)* Ako se ivica kocke produži za 3cm, površina joj se poveća za 198 cm^2 **. Izračunati površinu i zapeminu kocke.**

Rešenje:

Obeležimo ivicu kocke sa a . Njena površina je $P = 6a^2$

Ako se ivica kocke poveća za 3cm, njena ivica će biti (*a*+3) a površina $P_1 = 6(a+3)^2$

Prema tekstu zadatka će biti:

$$P_1 - P = 198cm^2$$

$$6(a+3)^2 - 6a^2 = 198 \rightarrow \text{ Sve podelimo sa 6}$$

$$(a+3)^2 - a^2 = 33$$

$$\cancel{a^2} + 6a + 9 \cancel{- a^2} = 33$$

$$6a = 33 - 9$$

$$6a = 24$$

$$a = 4cm$$

$$P = 6a^2 \qquad V = a^3$$

$$P = 6 \cdot 4^2 \qquad V = 4^3$$

$$P = 6 \cdot 16 \qquad V = 64cm^3$$

$$P = 96cm^2$$

2) Ivice dve kocke stoje u razmeri 4:3. Kolike su im površine i zapremine ako im se površine razlikuju za 168 cm^2 ?

Rešenje:

Obeležimo sa a stranicu jedne kocke a sa a_1 stranicu druge kocke.

$$a : a_1 = 4 : 3 \Rightarrow a = 4k \quad \text{i} \quad a_1 = 3k$$

$$P - P_1 = 168$$
$$6a^2 - 6a_1^2 = 168 \rightarrow \text{Delimo sve sa 6}$$
$$a^2 - a_1^2 = 28$$
$$(4k)^2 - (3k) = 28$$
$$16k^2 - 9k^2 = 28$$
$$7k^2 = 28$$
$$k^2 = 4$$
$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8cm$$
$$a_1 = 3k = 3 \cdot 2 = 6cm$$

Sada nije teško naći P i V.

$$P = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384cm^2$$
$$V = a^3 = 8^3 = 512cm^3$$
$$P = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216cm^2$$
$$V = a_1^3 = 6^3 = 216cm^3$$

3) Dimenzije kvadra su tri uzastopna cela broja, a dijagonala je $\sqrt{149}cm$. Izračunati površinu i zapreminu kvadra.

Rešenje:

Tri uzastopna cela broja možemo obeležiti sa $x-1$, x, $x+1$

$$a^2 + b^2 + c^2 = D^2$$
$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = \sqrt{149}^2$$
$$x^2 \cancel{-2x} + 1 + x^2 + x^2 \cancel{+2x} + 1 = 149$$
$$3x^2 = 149 - 1 - 1$$
$$x^2 = \frac{147}{3}$$
$$x^2 = 49$$
$$x = 7cm$$

$$a = x - 1$$
$$b = x$$
$$c = x + 1$$

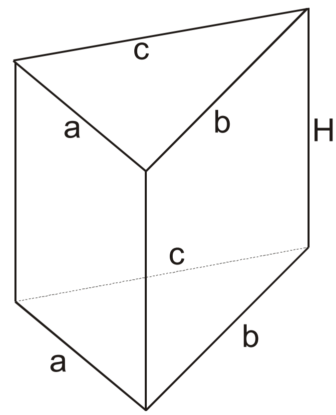
$$a = x - 1 = 6cm$$
$$b = x = 7cm$$
$$c = x + 1 = 8cm$$

$$P = 2(ab + ac + bc) = 2(6 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8) = 2 \cdot 146$$
$$P = 292cm$$

$$V = abc = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336cm^3$$

4) Dužine osnovnih ivica prave trostrane prizme odnose se kao 17:10:9, dužina bočne ivice je 16cm, a površina 1440 cm^2 . Odrediti dužine osnovnih ivica.

Rešenje:



$$a:b:c = 17:10:9$$
$$H = 16cm$$
$$P = 1440cm^2$$
$$a = ?, b = ?, c = ?$$

Iz $a:b:c = 17:10:9 \quad \Rightarrow \quad a = 17k, b = 10k, c = 9k$

$$P = 2B + M$$

Bazu ćemo izraziti preko Heronovog obrasca

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$B = \sqrt{18k \cdot 1k \cdot 8k \cdot 9k}$$
$$B = \sqrt{1296k^4}$$
$$B = 36k^2$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$
$$s = \frac{17k+10k+9k}{2}$$
$$s = 18k$$

$$M = aH + bH + cH = H(a+b+c)$$
$$M = 16 \cdot 38k$$
$$M = 576k$$
$$\boxed{P = 2B + M}$$
$$1440 = 2 \cdot 36k^2 + 576k$$

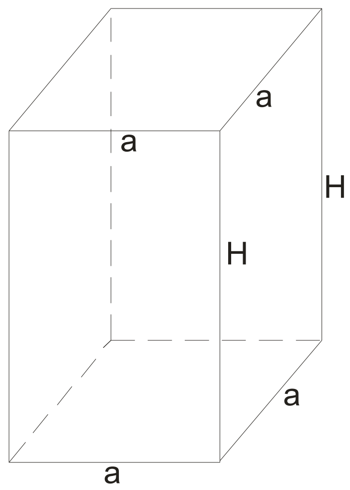
$72k^2 + 576k - 1440 = 0 \rightarrow$ Podelimo sve sa 72

$k^2 + 8k - 20 = 0 \rightarrow$ kvadratna po ‘’k’’

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm 12}{2} \rightarrow k = 2 \Rightarrow$$
$$a = 17 \cdot 2 = 34cm$$
$$b = 10 \cdot 2 = 20cm$$
$$c = 9 \cdot 2 = 18cm$$

5) Prava pravilna četvorostrana prizma ima visinu 16cm i površinu 370 cm^2 .

Izračunati osnovnu ivicu.



$$H = 16cm$$
$$P = 370cm^2$$
$$a = ?$$

$$P = 2B + M$$
$$P = 2a^2 + 4aH$$
$$370 = 2a^2 + 4a \cdot 16$$
$$370 = 2a^2 + 64a$$
$$2a^2 + 64a - 370 = 0$$
$$a^2 + 32a - 185 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-32 \pm 42}{2}$$
$$a_1 = 5$$
$$a_2 = -38 \rightarrow Nemoguće$$
$$a = 5$$

Dakle, osnovna ivica je $\boxed{a = 5cm}$

NAPOMENA:

Nepravilno je reći osnovna ivica je… već bi trebalo dužina osnovne ivice je…

Ako Vaš profesor insistira na ovome ispoštujte ga, jer je svakako u pravu.

Sve je stvar dogovora….

6) Izračunati površinu i zapreminu prave trostrane jednakoivične prizme ivice $a = 8cm$

Rešenje:

Podatak da je u pitanju jednakoivična prizma nam govori da je osnovna ivica jednaka visini. To jest, omotač se ovde sastoji iz 3 kvadrata stranice a

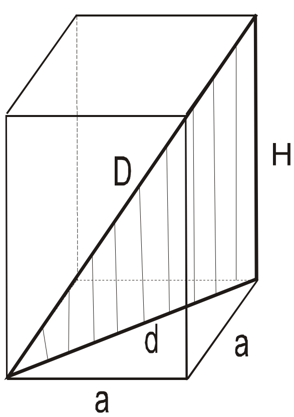
$$a = 8$$
$$P = 2B + M$$
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2$$
$$P = 2\frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 8^2$$
$$P = \frac{64\sqrt{3}}{2} + 64\cdot 3$$

$P = \left(32\sqrt{3} + 192\right)cm^2 \rightarrow$ Ovde ne bi bilo loše da se izvuče zajednički ispred zagrade!

$$P = 32\left(\sqrt{3} + 6\right)cm^2$$
$$V = B\cdot H$$
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$
$$V = \frac{8^3\sqrt{3}}{4} = \frac{512\sqrt{3}}{4}$$
$$V = 128\sqrt{3}cm^3$$

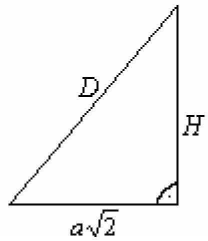
7) Pravilna četvorostrana prizma ima omotač 8 m^2 **i dijagonalu 3** m **. Izračunati njenu zapreminu.**

Rešenje:



Pošto je $M = 4aH \quad \Rightarrow \quad 4aH = 8 \Rightarrow aH = 2$

Iz trougla:



je

$$H^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = D^2$$
$$H^2 + 2a^2 = 9$$

Napravimo sistem:

$aH = 2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2}{a}$ → Zamenimo u drugu jednačinu

$H^2 + 2a^2 = 9$

$\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 2a^2 = 9$

$\frac{4}{a^2} + 2a^2 = 9 \rightarrow$ Smena: $a^2 = t$

$\frac{4}{t} + 2t = 9$

$2t^2 - 9t + 4 = 0$

$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4}$

$t_1 = 4$

$t_2 = \frac{1}{2}$

Vratimo se u smenu:

$a^2 = 4$

$a = 2m$

$H = \frac{2}{a}$

$H = 1m$

$V = a^2 \cdot H$

$V = 2^2 \cdot 1$

$V = 4m^3$

ili

$a^2 = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2} m$

$H = 2\sqrt{2}m$

$V = a^2 \cdot H$

$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2}$

$V = \frac{2}{4} \cdot 2\sqrt{2}$

$V = \sqrt{2}m^3$

Pazi: Ovde imamo 2 moguća rešenja, i oba su "dobra" jer zadovoljavaju zadate početne uslove!

8) Odrediti površinu i zapreminu kocke u funkciji površine dijagonalnog preseka.

Rešenje:

Površina dijagonalnog preseka je:

$$Q = a^2\sqrt{2}$$
$$a^2 = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$
$$a = \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \rightarrow Racionališemo$$
$$a = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}$$

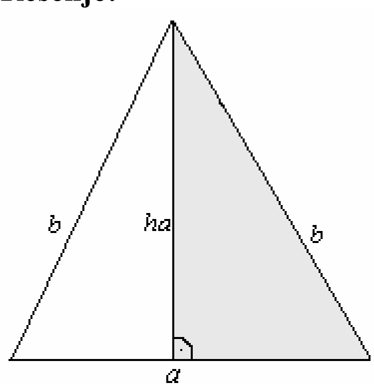
$$P = 6a^2 = 6\cdot\frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{6Q}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}Q$$
$$V = 6a^3 = 6\cdot\left(\frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}\right)^3 = \frac{6\sqrt{Q}^3\cdot\sqrt[4]{8^3}}{8}$$
$$V = \frac{6\sqrt{Q}^3\cdot\sqrt[4]{4^4\cdot 2}}{8} = \frac{6\sqrt{Q}^3\cdot 4\cdot\sqrt[4]{2}}{8} = 3\sqrt{Q}^3\sqrt[4]{2}$$
$$V = 3Q\sqrt{Q}\sqrt[4]{2}$$

Pazi (na sredjivanje): $\sqrt[4]{8^3} = \sqrt[4]{(2^3)^3} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^8}\cdot\sqrt[4]{2}$

$= 2^2\cdot\sqrt[4]{2} = 4\cdot\sqrt[4]{2}$

9) Osnova prava prizme je jednakokraki trougao osnovice 10dm, a visina tog trougla jednaka je visini prizme. Ako je zapremina prizme $720dm^3$, izračunati površinu prizme.

Rešenje:



$$a = 10dm$$
$$h_a = H$$
$$V = 720dm^3$$

$$V = B\cdot H$$
$$V = \frac{a\cdot h_a}{2}\cdot H$$
$$720 = \frac{10\cdot H}{2}\cdot H$$
$$720 = 5H^2$$
$$H^2 = 144$$
$$H = 12dm$$
$$h_a = 12dm$$

Primenimo Pitagorinu teoremu na jednakokraki trougao:

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a{}^2$$
$$b^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 12^2$$
$$b^2 = 5^2 + 12^2$$
$$b^2 = 169$$
$$b = 13dm$$

$$P = 2B + M$$
$$P = 2\cdot\frac{ah_a}{2} + aH + 2bH$$
$$P = ah_a + H(a+2b)$$
$$P = 10\cdot 12 + 12\cdot(10+26)$$
$$P = 120 + 432$$
$$P = 552dm^2$$

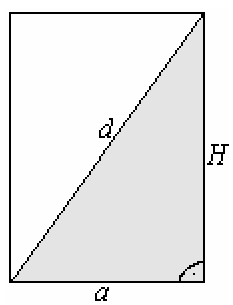
10) Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale $d_1 = 18cm, \quad d_2 = 24cm,$ dok je dijagonala bočne stranice prizme $d = 39cm$. Izračunati površinu prizme.

Rešenje:

Najpre primenimo Pitagorinu teoremu na romb.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$
$$a^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$
$$a^2 = 81 + 144$$
$$a^2 = 255$$
$$a = 15cm$$

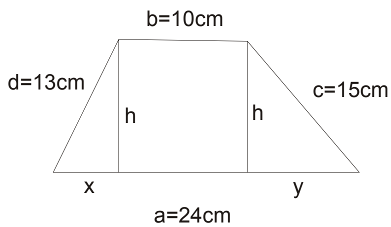
Pogledajmo jednu bočnu stranu:



$$H^2 = d^2 - a^2$$
$$H^2 = 39^2 - 15^2$$
$$H^2 = 1521 - 225$$
$$H^2 = 1296$$
$$H = 36cm$$

$$P = 2B + M$$
$$P = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{2} + 4aH$$
$$P = 18 \cdot 24 + 4 \cdot 15 \cdot 36$$
$$P = 432 + 2160$$
$$P = 2592cm^2$$

11) Osnova prizme je trapez čije su osnove 24cm i 10cm, a kraci 13cm i 15cm. Izračunati površinu i zapreminu ako je njena visina jednaka visini trapeza.
Rešenje:



→ Spustimo visine i obeležimo "deliće'' sa x i y

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = d^2 - x^2 \\ h^2 = c^2 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 - x^2 = c^2 - y^2$$

$$169 - x^2 = 225 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 225 - 169$$

$$y^2 - x^2 = 56$$

$$(y-x)(y+x) = 56$$

Kako je $x + y = a - b$
$x + y = 14$ imamo da je:

$$(y-x)\cdot 14 = 56$$

$$y - x = 4$$

Sada imamo sistem:

$$\left.\begin{array}{l} y + x = 14 \\ y - x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 18$$

$$y = 9cm$$

Vratimo se u:

$$h^2 = c^2 - y^2$$

$$h^2 = 15^2 - 9^2$$

$$h^2 = 225 - 81$$

$$h = 12cm$$

$$H = 12cm$$

$$P = 2B + M$$

$$B = \frac{a+b}{2}\cdot h$$

$$B = \frac{24+10}{2}\cdot 12$$

$$B = 17\cdot 12$$

$$B = 204cm^2$$

PAZI: M se sastaju iz četiri različita pravougaonika:

$$M = H(a+b+c+d)$$

$$M = 12\cdot(24+10+13+15)$$

$$M = 12\cdot 62$$

$$M = 744cm^2$$

$$P = 2\cdot 204 + 744$$

$$P = 1152cm^2$$

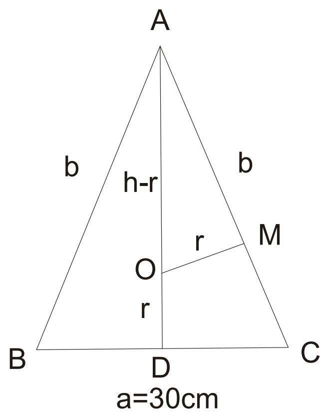
$$V = B\cdot H$$

$$V = 204\cdot 12$$

$$V = 2448cm^3$$

12) Osnova prizme je jednakokraki trougao osnovice 30cm i poluprečnik upisane kružnice je 10cm. Izračunati zapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trougla koja odgovara osnovici.

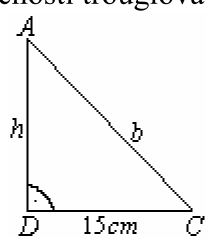
Rešenje:

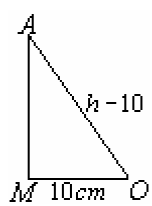


$$a = 30cm$$
$$r = 10cm$$
$$\frac{ha = H}{V = ?}$$

<u>I Način</u>

Iz sličnosti trouglova trougla ADC i trougla AMO





$$\Rightarrow 15:10 = b:(h-10)$$
$$15(h-10) = 10b$$
$$15h - 150 = 10b$$
$$3h - 30 = 2b$$
$$h = \frac{2b+30}{3}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$$
$$15^2 + \left(\frac{2b+30}{3}\right)^2 = b^2$$
$$225 + \left(\frac{4b^2 + 120b + 900}{9}\right) = b^2 .... / \cdot 9$$
$$2025 + 4b^2 + 120b + 900 = 9b^2$$
$$5b^2 - 120b - 2925 = 0$$
$$b^2 - 24b - 585 = 0$$
$$b_{1,2} = \frac{24 \pm 54}{2}$$
$$b_1 = 39cm$$
$$b_2 = -15 \rightarrow Nemoguće$$
$$b = 39cm$$

$(\frac{a}{2})^2 + h_a{}^2 = b^2$

$h_a{}^2 = b^2 - (\frac{a}{2})^2$

$h_a{}^2 = 39^2 - (\frac{30}{2})^2$

$h_a{}^2 = 1521 - 225$

$h_a{}^2 = 1296$

$h_a = 36cm$

Sada je $h_a = 36cm = H$

$B = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{30 \cdot 36}{2} = 540$

$V = BH$

$V = 540 \cdot 36$

$V = 19440cm^3$

Ovaj zadatak smo mogli rešiti i na drugi način.

II Način

Znamo obrasce za površinu:

$P = r \cdot S$ i $P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

to jest: $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+2b}{2} = \frac{30+2b}{2} = \frac{\cancel{2}(15+b)}{\cancel{2}}$

$S = 15 + b$

$P = \sqrt{(15+b)(15+b-30)(15+b-b)(15+b-b)}$

$P = \sqrt{(15+b)(b-15) \cdot 15^2}$

$P = 15\sqrt{b^2 - 15^2} = 15\sqrt{b^2 - 225}$

S druge strane je

$P = r \cdot s = 10 \cdot (15+b)$

$P = P$

$10(15+b) = 15\sqrt{(b-15)(b+15)}$

$100(15+b)^2 = 15^2(b-15)(b+15)$

$100(15+b) = 225(b-15)$

$1500 + 100b = 225b - 3375$

$100b - 225b = -3375 - 1500$

$-125b = -4875$

$b = 39cm$